DOI：10.13245/j.hust.260023

基于相位敏感核的浅水小目标定位方法

喻 敏 穆焰堃 黄婉静 田洪海
(武汉理工大学船海与能源动力工程学院，湖北 武汉 430063)

摘要 针对浅水环境中当对小目标进行探测定位时，存在小目标声学特性弱而定位效果受限的问题，提出一种基于相位敏感核函数的小目标声学定位方法．该方法基于射线声学理论，采用双波束成形方法分离并筛选受目标扰动的本征声线，通过计算扰动声线的相位敏感核函数实现目标定位．在实验室缩尺比试验中对直径为0.8 cm的目标实现定位，定位误差小于10%．结果表明：相较于幅值敏感核函数定位方法，基于相位敏感核函数的声学定位算法的定位精度更高，对目标的微小扰动相应更显著、线性特性更优、重叠度更高，定位误差更小，定位模糊图空间对比度更高，适合应用在针对浅水小目标的定位工况中．

关键词 水下定位；扰动声线；前向散射；相位敏感核；小目标探测
中图分类号 TB556；O427 **文献标志码** A **文章编号** 1671-4512(2026)10-0133-07

Shallow water small target localization method based on phase-sensitive kernel

YU Min MU Yankun HUANG Wanjing TIAN Honghai
(School of Naval Architecture，Ocean and Energy Power Engineering，Wuhan University of Technology，Wuhan 430063，China)

Abstract Aiming at the problem that the localization effect is limited due to the weak acoustic characteristics of small targets during small target detection and localization in shallow water environments，a small target acoustic localization method was proposed based on the phase-sensitive kernel function．Based on the ray acoustics method，the proposed method adopted the dual beamforming method to screen the eigenrays disturbed by the target，and realized target localization by calculating the phase-sensitive kernel function of the disturbed eigenrays．In the laboratory scaled model test，localization of a target with a diameter of 0.8 cm was achieved，with a localization error of less than 10%．Results show that compared with the localization method based on amplitude-sensitive kernel function，the acoustic localization algorithm based on phase-sensitive kernel function possesses higher localization accuracy，more significant responses to tiny disturbances of targets，better linear characteristics，higher overlap degree and smaller localization error，and the spatial contrast of localization ambiguity map is higher，which is suitable for the localization working conditions of small targets in shallow water．

Key words underwater localization；perturbed eigenrays；forward scattering；phase-sensitivity kernel；small target detection

水下小目标是指尺寸远小于探测声波波长或目标强度弱且探测难度大的水下物体[1]，针对此类小目标的定位技术是水下防御中重要的研究领域．传统方法基于后向散射信号进行定位，受限于作用距离和混响干扰的影响，作用距离和定位精度难以兼顾；而前向散射信号能量一般高于后向散射信号，且与目标强度无直接关系，因此有必要发展基于前向散射信号的定位方法．

目前基于前向散射信号的定位方法主要有声阻抗反演法、时间反转法和扰动声线法．声阻抗反演法计算成本较高且对初始模型较为敏感；时间反转法需要复杂的硬件支持[2]；扰动声线法基于射线声学理论，计算效率相比前两种方法都更高，且无需远距离传输数据，因此使用扰动声线法能更高效对

收稿日期 2025-12-26．
作者简介 喻 敏(1978—)，女，教授，E-mail：yumin@whut.edu.cn．
基金项目 国家自然科学基金资助项目(52271349)．

浅水小目标进行定位，但该方法存在定位结果模糊、精度不高的问题．为了解决这一问题，学者们引入敏感核函数来进行优化[3-5]．

根据声学观测量的不同，国内外学者提出了多种声敏感核[6-11]．大多数学者选用声压敏感核实现目标定位．Folegot等[12]提出利用扰动声线几何交汇的定位方法，并通过海试验证了可行性．Marandent等[13]结合声压敏感核与扰动声线法，给出一种新的小目标定位思路．唐浩等[14]研究了浅水环境下扰动声线的声压敏感核的空间特性，对声学绊网系统目标定位进行了研究与实验．刘帅京[15]提出了基于稳健声线扰动特征的目标定位方法，应用湖试实验验证了可行性．同年，雷波等[16]利用迁移学习提高模型对环境失配的稳健性．Lei等[17]提出基于偏最小二乘的预训练降维方法，实现了无人水下航行器的实时探测．He等[18]基于简正波模型与二维目标概率分布，提出了传输型声学探测的工作深度全局优化方法．

上述学者使用的声压敏感核只考虑了幅值项，未考虑相位项的影响．与此同时，相关学者认为相位项对应的相位敏度核函数比幅值敏感核函数的线性化特性更加明显[19-20]．此外，本征声线分离是筛选扰动声线的关键．国内外学者采用双波束成形的方法进行本征声线分离，Marandet等[13]使用双波束成形算法分离本征声线，获得了较好的声线分离效果；Sukhovich等[21]基于双波束成形算法识别多反射本征声线；Roux等[22]提出双波束成形协同处理方法，实现类射线本征声线的精准分离；刘帅京等[23]基于表面散射敏感核函数表达式，结合双波束成形技术实现本征声线分离．上述研究中，学者们使用双波束成形技术获得了较好的声线分离效果．

为此，本研究围绕相位敏感核展开研究，首先推导分析其特性，引入波束形成算法分离声线；然后给出基于相位敏感核的扰动声线定位算法，通过仿真分析算法的性能；最后通过缩尺比实验进行验证，并分析误差来源．本研究为浅水环境下基于相位敏感核函数的小目标定位方法提供重要理论基础．

1　基于相位敏感核的扰动声线法

扰动声线法基于射线声学进行声场建模，提取扰动声线，并利用扰动声线的几何交汇特性，实现目标的探测与定位．如图1所示，假设目标在(90 m，25 m)处，多条扰动声线会相交于目标附近的区域，无法得到目标的精确位置点．为此，可应用敏感核函数以提升扰动声线法的定位精度．

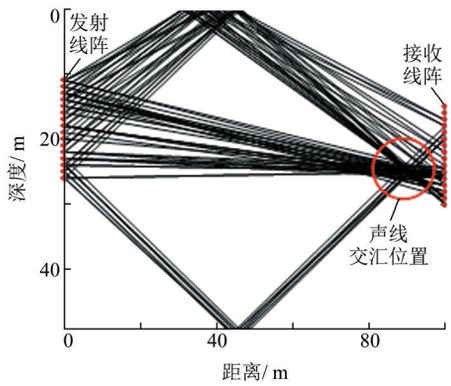


图1　扰动声线定位法示意图

1.1　相位敏感核函数

以点源为研究对象，给出相位敏感核函数的表达式求解过程．假设声源和接收点之间的水平距离为r，声源位于声场中的$\vec{r}_s$处，接收点位于$\vec{r}_r$处，$P_s(\omega)$为声源发射信号的频域形式，则接收点的声信号可表示为

$$p_r(t;\ c)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega;\ \vec{r}_r;\ \vec{r}_s)P_s(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega,\quad(1)$$

式中：ω为圆频率；$G(\omega;\vec{r}_r;\vec{r}_s)$为格林函数值，表示空间中位于$\vec{r}_s$处的点源对接收点$\vec{r}_r$所产生的影响；$t$为时间；$c$为声速．

当声场中存在一个声速扰动δc时，它会引起格林函数的扰动δG，在一阶Born近似假设与远场近似假设下，可获得δG简化式[20]为

$$\delta G(\omega;\ \vec{r}_r;\ \vec{r}_s)=\iiint_V\begin{bmatrix}-2\omega^2G(\omega;\ \vec{r}_r;\ \vec{r}')\\ G(\omega;\ \vec{r}';\ \vec{r}_s)\delta c(\vec{r}')/c^3(\vec{r}')\end{bmatrix}\mathrm{d}V(\vec{r}'),\quad(2)$$

式中V为体积分项符号．

由式(1)可知，格林函数扰动会引起接收点的声压扰动δp_r，有

$$\delta p_r(t;\ c)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta G(\omega;\ \vec{r}_r;\ \vec{r}_s)P_s(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.\quad(3)$$

将式(2)代入式(3)中得到接收点声压扰动与声场中任意一点声速扰动之间的对应关系，这一关系式即声压敏感核函数(PSK)，可表示为

$$\frac{\partial p_r(t,c)}{\partial c(r')}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}-2\omega^2G(\omega;\ \vec{r}_r;\ \vec{r}')\\ G(\omega;\ \vec{r}';\ \vec{r}_s)P_s(\omega)/c^3(\vec{r}')\end{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.\quad(4)$$

将接收点测得的声压展开

$$p_r(t;\ c)=a(t;\ c)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}=A(t;\ c)+\mathrm{i}B(t;\ c),\quad(5)$$

式中：A为实部；B为虚部；$a(t;c)$为接收点声压

的幅值，有 $a(t;c)=\sqrt{A^2(t;c)+B^2(t;c)}$.

设 $\theta(t;c)$ 为接收点声压的相位，有

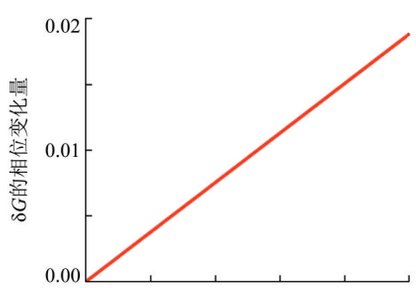
$$\theta(t;c)=\arctan\left(B(t;c)/A(t;c)\right).$$

为了更好区分，根据上述推导与敏感核函数定义可得幅值敏感核函数 PASK 与相位敏感核函数 PHSK 如下所示

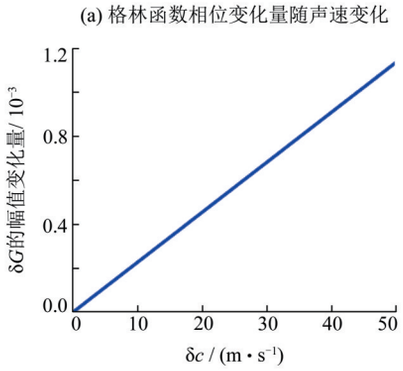
$$\text{PASK:}\ \frac{\partial a(t;c)}{\partial c(r')}=\frac{\partial\sqrt{A^2(t;c)+B^2(t;c)}}{\partial c(r')};\quad(6)$$

$$\text{PHSK:}\ \frac{\partial\theta(t)}{\partial c(r')}=\frac{\left[A\partial B/\partial c-B\partial A/\partial c\right]}{(A^2+B^2)}.\quad(7)$$

进一步分析比较 PASK 与 PHSK 随声速扰动变化的特性．由式(2)～(4)可以发现：敏感核函数的值主要由 δG 决定，且 δG 的幅值项和相位项分别与 PASK，PHSK 相对应．因此，分析给定频率下声速变化引起的格林函数变化，即可对 PASK 和 PHSK 对目标引起声速扰动的性能进行分析．根据式(2)，当计算频率为 20 kHz 时，在不同 δc 下，δG 对应的幅值项与相位项的变化如图 2 所示．



(a) 格林函数相位变化量随声速变化



(b) 格林函数幅值变化量随声速变化

图2　目标点声速扰动对格林函数的影响

由图 2 可见 δG 的相位项变化斜率远大于幅值项变化斜率，即相同声速变化引起的相位项变化远大于幅值项变化，说明相位敏感核对声速变化更为敏感．因此，本研究提出基于相位敏感核函数的扰动声线定位方法，以期获得更好的定位效果．

1.2　基于双波束成形的声线分离

扰动声线定位法的关键在于扰动声线的准确筛选，扰动声线筛选越精确，数量越多，定位效果越好．声线筛选的前提是须要对声线进行有效分离，为此本研究采用双波束成形算法将声场由空间域转换到角度域，通过搜寻本征声线的发射角和到达角，实现声线的有效分离．

为了分离得到各个发射阵元与接收阵元对应的本征声线，须要将发射阵列与接收阵列从上到下划分为多个相同阵元数的子阵列，并将垂直子阵列的中心阵元设为参考阵元，通过依次遍历中心阵元所处阵元位置来得到各个发射阵元到各个接收阵元的本征声线的发射角 θ_s 与接收角 θ_r.

以发射子阵列 1 与接收子阵列 1 中的水面反射声线为例，结果如图 3 所示，图中：z_s 为发射阵列；z_r 为接收阵列．声线从发射子阵 1 的中心阵元 z_{s0} 以发射角 θ_s 发出，经水面反射以接收角 θ_r 到接收子阵 1 的中心阵元 z_{r0}.

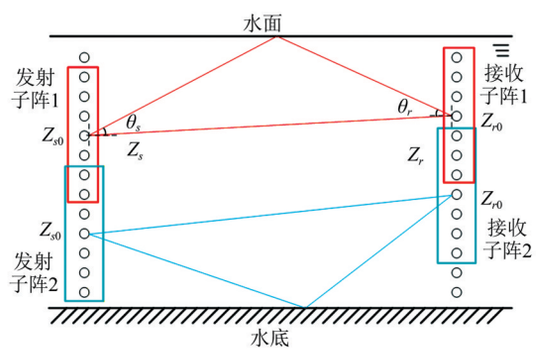


图3　双波束成形子阵列分离声线示意图

将参考阵元时间延迟设置为零，对双阵进行时延波束形成[7]

$$p(t,\theta_s,\theta_r)=\frac{1}{N_sN_r}\sum_{i=1}^{N_r}\sum_{j=1}^{N_s}p\left[t+\tau(\theta_s,z_{sj})+\tau(\theta_r,z_{ri})\right],\quad(8)$$

式中：θ_s 为发射角；θ_r 为接收角；N_s 为发射子阵列的阵元数量；N_r 为接收子阵列的阵元数量；z_{sj} 为发射子阵列第 j 个阵元的深度；z_{ri} 为接收子阵列第 i 个阵元的深度；$\tau(\theta_s,z_{sj})$ 与 $\tau(\theta_r,z_{ri})$ 分别为发射子阵列第 j 个阵元 z_{sj} 与参考阵元 z_{s0} 的时延差和接收子阵列第 i 个阵元 z_{ri} 与参考阵元 z_{r0} 的时延差．又有

$$\tau(\theta_s,z_{sj})=(z_{sj}-z_{0s})\sin\theta_s/c;$$

$$\tau(\theta_r,z_{ri})=(z_{ri}-z_{0r})\sin\theta_r/c.$$

通过式(8)求解得到 θ_s 与 θ_r，即可分离此本征声线．

1.3　基于相位敏感核的定位方法

设 Δp 为特征变化量，基于相位敏感核函数的扰动声线法定位原理如图 4 所示．首先对浅水环境下多途效应所产生的本征声线进行声线分离，根据有无目标扰动情况下的声压变化量设定阈值，基于阈值筛选本征声线，获得扰动声线；同时根据

Bellhop 工具箱计算格林函数，进一步计算格林函数扰动变化量，根据式(4)～(7)遍历空间位置点$\vec{r}'$，求解得到第j条扰动声线的相位敏感核函数；最后叠加所有扰动声线的相位敏感核函数值，得到目标的定位模糊图，图中亮点位置就是目标最可能的位置.

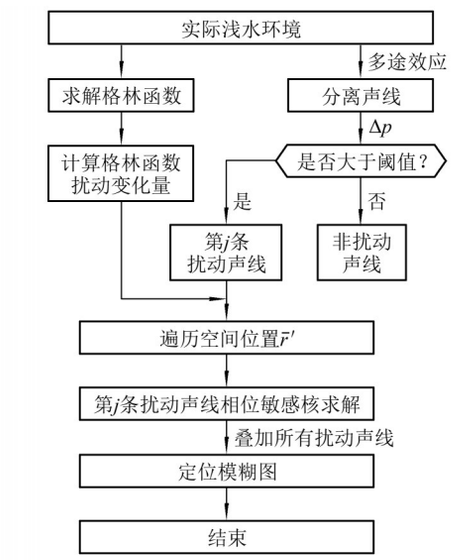


图4　相位敏感核定位原理流程

2　仿真分析

2.1　仿真设置

如图5所示，仿真区域为长100 m、深50 m的二维浅水环境. 假设为等声速剖面，水面水底均为平整界面，声线沿直线传播. 目标为直径10 cm的刚性小球，放置在(60 m，30 m)处. 发射阵列与接收阵列相距100 m，发射阵为由7个五元子阵列等间距组成，子阵列相隔5 m；接收阵为16个五元等间距线阵组成，子阵列相隔1 m；子阵元间距均为0.08 m. 当信噪比为20 dB时，发射阵元依次发射15 kHz单频信号. 使用波束成形方法进行声线分离仿真，并分别使用幅值敏感核与相位敏感核的定位方法进行仿真.

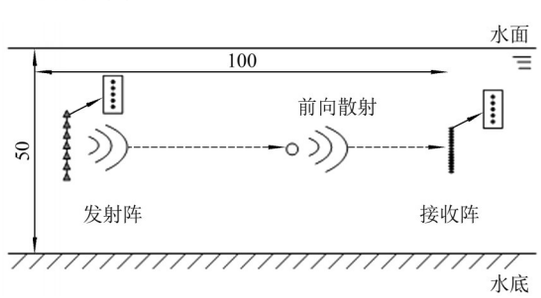


图5　仿真设置示意图(m)

2.2　基于双波束成形的扰动声线筛选仿真

通过划分子阵列，遍历发射阵元与接收阵元，使用双波束成形获取每条声线的角度信息，实现声线分离. 计算同一条本征声线在有无目标两种情况下的幅值变化量，并将所有本征声线的幅值变化量的平均值作为筛选阈值，认为幅值变化量超过阈值的本征声线为扰动声线，对分离得到的本征声线进行扰动声线筛选. 声线筛选结果如图6所示，图中红色三角形为各个发射子阵列的中心阵元，蓝色圆圈为各个接收子阵列的中心阵元.

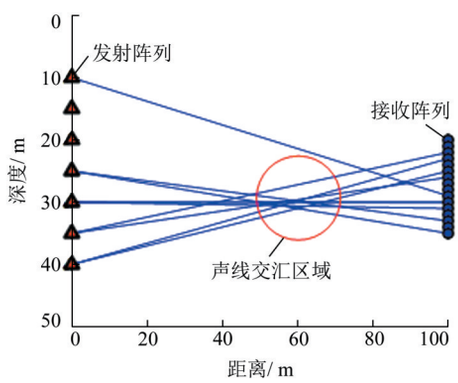
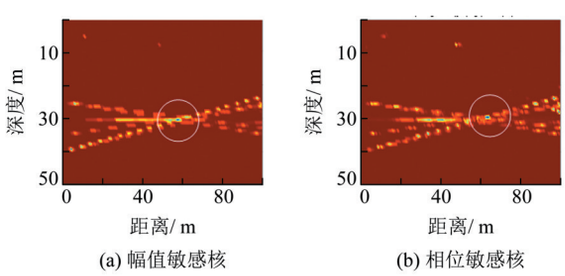


图6　扰动声线筛选结果

2.3　基于相位敏感核与幅值敏感核定位仿真

根据扰动声线筛选结果，分别进行声压敏感核与相位敏感核定位仿真. 仿真结果如图7所示，定位结果分别为图中圆圈内亮点处. 相位敏感核定位结果为(61.6 m，29.6 m)；幅值敏感核定位结果为(56 m，30.4 m). 对比定位结果可以发现：相同仿真条件下，两种算法均能实现目标定位，但相位敏感核定位结果亮点区域更小更直观，定位更准确. 这是由于相位敏感核对声速扰动更敏感，因此所得到的敏感核值空间对比度会更高.

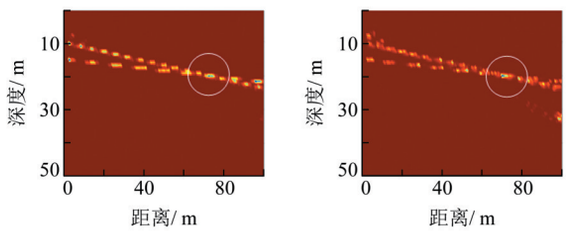


(a) 幅值敏感核　　(b) 相位敏感核

图7　目标(60 m，30 m)处定位结果

改变目标位置为(70 m，20 m)处，定位结果如图8所示. 当目标位于(70 m，20 m)处时，相位敏感核定位结果为(69.6 m，20 m)；幅值敏感核定位结果为(70.4 m，20 m). 由上述定位结果对比可得：当对目标进行定位时，基于相位敏感核的定位方法结果均比基于幅值敏感核的定位方法结果更准确，

具体体现在定位亮点更明显，更接近目标实际位置．



(a) 幅值敏感核　　(b) 相位敏感核

图8　目标(70 m，20 m)处定位结果

3　实验验证

为了验证仿真结论，在实验室条件下进行缩尺比实验．实验阵列布置如图9所示，水箱宽为0.6 m，水深为0.45 m，水箱两侧水下为0.05～0.35 m的深度位置分别布置等间距0.02 m的16元的垂直发射线阵与垂直接收线阵，从上往下依次编号．实验过程中，目标为一个用细绳系住的直径0.8 cm的小球体，通过调整细绳的长度和固定位置来调整小球体的位置，以实现多个目标位置工况．

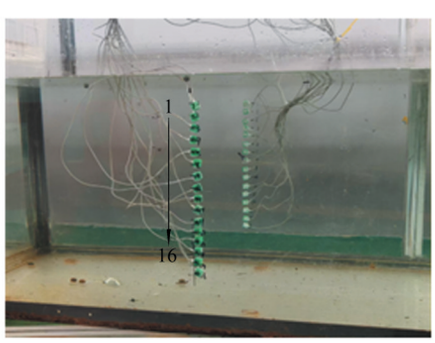


图9　实验阵列布置测试图

实验中，发射阵元依次发射200 kHz的单频脉冲信号，接收阵元同时接收的方式进行实验，取目标位于(0.3 m，0.1 m)处为例，使用双波束成形方法筛选扰动声线结果如图10所示．

对筛选结果分别进行幅值敏感核函数与相位敏感核函数计算定位结果如图11所示．定位结果为图中圆圈中的亮点，上述结果表明：幅值敏感核函数与相位敏感核函数均能定位目标，但幅值敏感核函数定位模糊图的对比度低，亮点范围大，还会出现多个干扰亮点位置；而相位敏感核函数定位模糊图对比度高，定位亮点清晰，亮点范围小，且无干扰亮点．

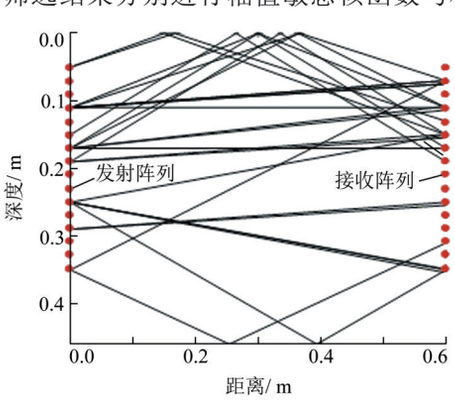
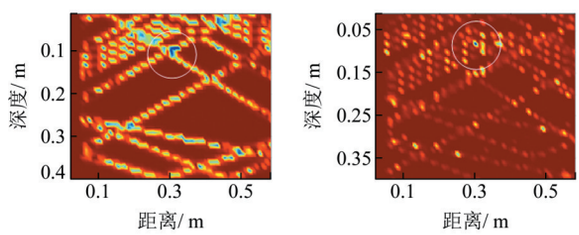


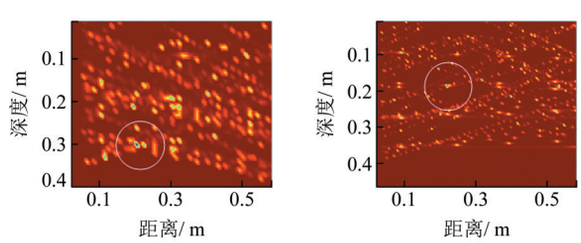
图10　扰动声线筛选结果图



(a) 幅值敏感核　　(b) 相位敏感核

图11　目标(0.3 m，0.1 m)处定位结果

改变目标位置，可以得到相位敏感核定位结果如图12所示．为了定量评价算法的定位结果，采用重叠度β_{IoU}与误差δ的方式对结果进行评价．



(a) (0.2 m，0.3 m)处　　(b) (0.2 m，0.2 m)处

图12　相位敏感核定位结果

重叠度计算公式为

$$\beta_{\mathrm{IoU}} = (S_{\mathrm{GT}}/S_{\mathrm{PRED}}) \times 100\%,$$

式中：S_{GT}为物体真实区域面积，此处为直径0.8 cm的圆形范围；S_{PRED}为算法定位区域．

误差计算公式为

$$\delta = [\varepsilon/(S_x/S_y)] \times 100\%,$$

式中：ε为目标中心与定位中心实际偏差；S_x为x轴计算域范围；S_y为y轴计算域范围．结果整理如表1～3所示，表中：β_{IoU1}为相位重叠度；β_{IoU2}为幅值重叠度．

表1　不同目标位置敏感核定位重叠度表

目标位置/m	β_{IoU1}/%	β_{IoU2}/%
(0.3，0.1)	84.91	52.36
(0.2，0.2)	87.27	84.91
(0.2，0.3)	82.67	44.88

由表1～3结果可得：以步长0.01 m进行定位计算，相位敏感核定位结果比幅值敏感核定位结果重叠度更高，在x轴上定位结果更精确，且定位误

表 2　不同目标位置相位敏感核定位误差表

目标位置/m	定位结果/m	x轴误差/%	y轴误差/%
(0.3，0.1)	(0.30，0.08)	0.0	4.4
(0.2，0.2)	(0.19，0.18)	1.7	4.4
(0.2，0.3)	(0.21，0.29)	1.7	2.2

表 3　不同目标位置幅值敏感核定位误差表

目标位置/m	定位结果/m	x轴误差/%	y轴误差/%
(0.3，0.1)	(0.32，0.12)	3.33	4.4
(0.2，0.2)	(0.22，0.21)	3.33	2.2
(0.2，0.3)	(0.22，0.32)	3.33	4.4

差小于 10%．

本次实验中，相位敏感核算法的定位结果与目标实际位置基本一致，但结果仍存在一定误差，其主要原因在于：本算法须要基于 Bellhop 软件计算扰动声线敏感核函数，此时输入环境参数和阵元位置均是理想状态，但实际环境与计算采用的环境参数并不能完全匹配．当阵列布放时，由于阵元是贴在水池壁面，因此不可避免会带来安装误差，如阵元间距不能完全相同．这些均会引起 Bellhop 软件计算的输入参数与实际情况有差异，从而引入误差．

4　结论

a．使用双波束成形算法进行扰动声线的筛选，能有效识别到达结构，分离多途效应，为后续声线筛选提供有效数据支撑．

b．首次将相位敏感核应用到扰动声线法定位中．与幅值敏感核定位方法相比，使用相位敏感核定位精度更高，对目标声速扰动的敏感性更强，能有效捕捉小目标引起的细微声学变化，进一步发展了基于声压敏感核函数的定位方法．

c．在实验室中开展缩尺比实验，成功实现了使用相位敏感核函数对目标定位，且定位误差小于 10%．分析不同工况下的定位结果，验证了相位敏感核定位方法比幅值敏感核定位方法重叠度更高，定位结果更精确．

参　考　文　献

[1] 刘伯胜，雷家煜．水声学原理[M]．2版．哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2010．

[2] ROUX P，KUPERMAN W A，HODGKISS W S，et al．A nonreciprocal implementation of time reversal in the ocean[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2004，116(2)：1009-1015．

[3] SKARSOULIS E K，ATHANASSOULIS G A，SEND U．Ocean acoustic tomography based on peak arrivals [J]．The Journal of the Acoustical Society of America，1996，100(2)：797-813．

[4] SKARSOULIS E K，CORNUELLE B D．Travel-time sensitivity kernels in ocean acoustic tomography[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2004，116 (1)：227-238．

[5] HUANG Y，ZHAO H F，WANG F Y．Ocean acoustic tomography using travel-time sensitivity kernel[C]// Proc of Conference on OCEANS 2016．Shanghai：IEEE，2016：1-7．

[6] SARKAR J，MARANDET C，ROUX P，et al．Sensitivity kernel for surface scattering in a waveguide[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2012，131(1)：111-118．

[7] AULANIER F，NICOLAS B，ROUX P，et al．Time-angle sensitivity kernels for sound-speed perturbations in a shallow ocean[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2013，134(1)：88-96．

[8] 汪非易．深海声层析传播时延敏感核方法[D]．杭州：浙江大学，2016．

[9] VAN BAARSEL T，ROUX P，MARS J I，et al．Dynamic imaging of a capillary-gravity wave in shallow water using amplitude variations of eigenbeams[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2019，146 (5)：3353-3361．

[10] GARNIER J，ROUX P．Modal formulation and paraxial approximation for acoustic wave propagation in waveguides with surface perturbations[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2022，151(5)：3239-3254．

[11] VAN BAARSEL T，ROUX P，MARS J I，et al．Surface perturbation inverted from angle variations of eigenbeams in an ultrasonic waveguide[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2020，148(5)：2841-2850．

[12] FOLEGOT T，MARTINELLI G，GUERRINI P，et al．An active acoustic tripwire for simultaneous detection and localization of multiple underwater intruders[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2008，124 (5)：2852-2860．

[13] MARANDET C，ROUX P，NICOLAS B，et al．Target detection and localization in shallow water：an experimental demonstration of the acoustic barrier problem at the laboratory scale[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2011，129(1)：85-97．

[14] 唐浩，许枫，杨娟．扰动声线声压敏感核用于浅水前向散射小目标定位[J]．声学学报，2019，44(4)：

576-584．

[15] 刘帅京，许枫，杨娟．稳健声线扰动特征用于浅海小目标定位[J]．应用声学，2021，40(6)：810-820．

[16] 雷波，何兆阳，张瑞．基于迁移学习的水下目标定位方法仿真研究[J]．物理学报，2021，70(22)：183-192．

[17] LEI B，HE Z Y，FAN Q G，et al．Habor protection with underwater acoustic barrier：method and system[J]．Applied Acoustics，2025，239：110856．

[18] HE Z Y，LEI B，YANG Y X．Optimization method of operating depth for transmitted acoustic detection of underwater targets[J]．Applied Acoustics，2025，237：110770．

[19] 温凤丹，林巨．浅海环境下的声学灵敏度核函数研究[J]．南京大学学报(自然科学)，2017(1)：135-143．

[20] SARKAR B．Linear acoustic sensitivity kernels and their applications in shallow water environments[D]．San Diego：University of California，2011．

[21] SUKHOVICH A，ROUX P，WATHELET M．Geo-acoustic inversion with two source-receiver arrays in shallow water[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2010，128(2)：702-710．

[22] ROUX P，CORNUELLE B D，KUPERMAN W A，et al．The structure of raylike arrivals in a shallow-water waveguide[J]．The Journal of the Acoustical Society of America，2008，124(6)：3430-3439．

[23] 刘帅京，许枫，杨娟．浅海表面散射敏感核函数特性研究[J]．网络新媒体技术，2021，10(4)：39-44．